8. OPERACIONES CON SUBESPACIOS. INTERSECCIÓN

8.1. DESCRIPCIÓN DE UN SUBESPACIO

En resumen, un subespacio vectorial puede ser descrito de tres formas:

- Mediante un conjunto generador del subespacio: $S = \mathcal{L}\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$. Una base es un caso particular de éste, en el que el conjunto de vectores es, además de generador, linealmente independiente.

- Mediante el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo:
$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$
Si dicho sistema está sin resolver, se dice que define a S implícitamente, o que el sistema representa unas **ecuaciones implícitas** del subespacio S.

- Si el sistema de ecuaciones lineales homogéneo que define a S está ya resuelto, y S viene dado en función de ciertos parámetros, se dice que son unas **ecuaciones paramétricas** del subespacio. Estas ecuaciones también se pueden obtener a partir de un conjunto generador $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$, desglosando la ecuación vectorial:
$$\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{u_1} + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{u_m}$$

EJEMPLO 14

Calcular unas ecuaciones paramétricas del subespacio de $\mathbb{R}^3$ $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$

Solución

Aunque no es necesario, una buena práctica que evita muchos errores es obtener siempre una base del subespacio que se trata, para ello se calcula el rango del conjunto de vectores dado:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\mathbf{1} & 0 & 1\\0 & \mathbf{1} & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

El rango es 2, y los pivotes están situados en las columnas 1 y 2, por tanto una base del subespacio S es $B_S = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$. Todo vector $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in S$ se puede escribir como solución de la ecuación vectorial: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, desglosando esta ecuación se tiene:

$\boxed{\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \mu \end{cases}}$, estas son unas ecuaciones paramétricas del subespacio S.

EJEMPLO 15

Calcular unas ecuaciones implícitas del subespacio del ejemplo anterior.

Solución

Por el ejemplo 14, se sabe que las ecuaciones paramétricas de S son: $\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \mu \end{cases}$.

Unas ecuaciones implícitas de S será un sistema de ecuaciones lineales cuya solución sea exactamente ese conjunto de ecuaciones paramétricas.

Para obtener tal sistema, se eliminan los parámetros en las ecuaciones paramétricas:

$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \mu \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_3 = x_2 \Rightarrow \boxed{x_1 - x_2 + x_3 = 0}$, que son las ecuaciones implícitas de S.

OBSERVACIONES

- A partir de un conjunto generador, se pueden obtener unas ecuaciones paramétricas desglosando la ecuación vectorial como en el ejemplo 14.
- A partir de unas ecuaciones paramétricas, se pueden obtener unas ecuaciones implícitas como se ha visto en el ejemplo 15, eliminando los parámetros.
- A partir de unas ecuaciones implícitas se pueden obtener unas ecuaciones paramétricas del mismo subespacio sin más que resolver el sistema de ecuaciones dado por las implícitas.
- A partir de unas ecuaciones paramétricas se puede obtener un conjunto generador del subespacio con el proceso descrito en el ejemplo 16 (visto en la unidad 5).

EJEMPLO 16

Calcular unas ecuaciones paramétricas y una base del subespacio vectorial de $\mathbb{R}^5$ cuyas ecuaciones implícitas son las siguientes: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

Solución

Para obtener las ecuaciones paramétricas de un subespacio, que está definido por unas ecuaciones implícitas, se resuelve el sistema dado. En este caso la matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{x_4=\lambda \\ x_5=\mu}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\lambda - 3\mu \\ x_4 = \lambda \\ x_5 = \mu \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas del subespacio son por tanto: $\begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\lambda - 3\mu \\ x_4 = \lambda \\ x_5 = \mu \end{cases}$

Para calcular un conjunto generador, se escriben las ecuaciones paramétricas en forma vectorial, como suma de tantos vectores como parámetros, y se saca factor común al parámetro: $\begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = -\lambda - 3\mu \\ x_4 = \lambda \\ x_5 = \mu \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Luego un conjunto generador de S es $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Se puede comprobar que el conjunto es linealmente independiente, y por tanto una base.

8.2. INTERSECCIONES DE SUBESPACIOS

Si S_1 y S_2 son dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$, se define el **subespacio intersección** como el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$ que está a la vez en S_1 y en S_2, y se nota del siguiente modo:

$$S_1 \cap S_2 = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \in S_1 \ y \ \boldsymbol{x} \in S_2 \}$$

OBSERVACIÓN

Si $S_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ y $S_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ entonces

$$S_1 \cap S_2 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, A_1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \ y \ A_2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \right\}$$

Esto proporciona un método para calcular la intersección de dos subespacios a partir de sus ecuaciones implícitas.

EJEMPLO 17

Calcular una base del subespacio intersección de $S = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ y $T = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Solución

Para obtener el subespacio intersección, se calculan las ecuaciones implícitas de cada uno de los subespacios, para ello (dado que en ambos casos se parte de un conjunto generador del subespacio) se eliminan parámetros en las ecuaciones paramétricas.

$$S \equiv \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = \lambda\\ x_2 = 2\lambda + \mu\\ x_3 = 2\lambda + \mu\end{cases} \Rightarrow x_2 - x_3 = 0$$

$$T \equiv \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1 = \lambda\\ x_2 = \mu\\ x_3 = \lambda\end{cases} \Rightarrow x_1 - x_3 = 0$$

$$S \cap T \equiv \begin{cases}x_2 - x_3 = 0\\ x_1 - x_3 = 0\end{cases}$$

Para obtener una base del subespacio intersección, se resuelve el sistema que lo define, y cuya matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{1} & 0 & -1 & 0\\ 0 & \mathbf{1} & -1 & 0\end{array}\right) \xRightarrow[x_3=\lambda]{} \begin{cases}x_1 = \lambda\\ x_2 = \lambda\\ x_3 = \lambda\end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow S \cap T = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

El conjunto $B_{S\cap T} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ además de ser generador del espacio $S \cap T$, es linealmente independiente (consta de un único vector no nulo), luego es una base de $S \cap T$.